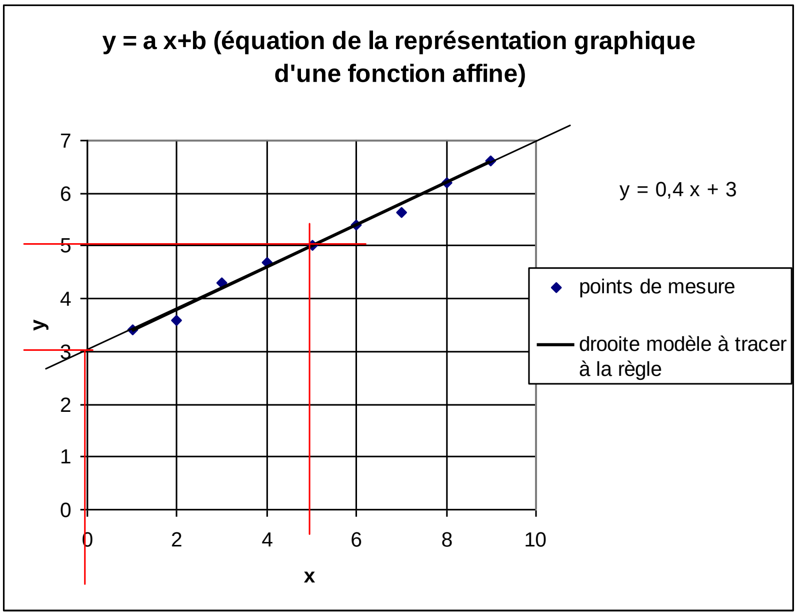
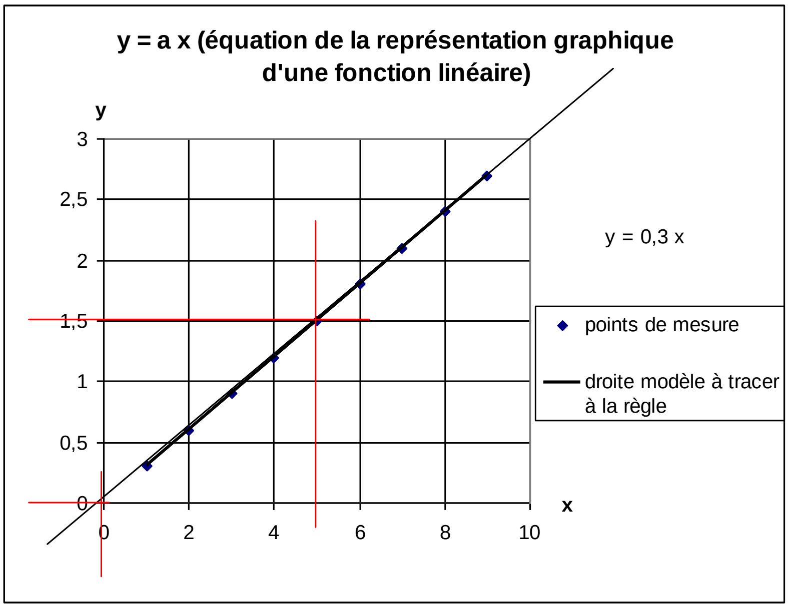
Pente d'une droite



Droite ne passant pas par l'origine du repère :
Soient P_1 et P_2 deux points de la droite.

$$\text{pente} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-3}{5-0} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$



Droite passant par l'origine du repère :
On choisit P_1 en O.

$$\text{pente} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1{,}5-0}{5-0} = \frac{1{,}5}{5} = 0{,}3$$

Un tel graphique traduit une relation de **proportionnalité** entre y et x.

<u>Attention</u> : **en sciences physiques, une pente a une unité** !

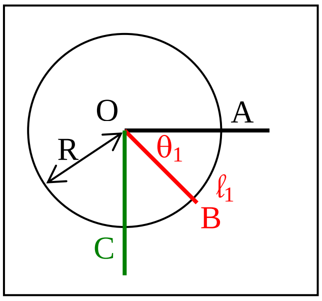
En électricité : U = R I $\quad R = \frac{\Delta U}{\Delta I}$ en V/A ou $V.A^{-1}$ c'est-à-dire Ω .

En spectrophotométrie : A = k c $\quad k = \frac{\Delta A}{\Delta c}$ en 1/(mol/L) ou L/mol ou $L.mol^{-1}$.

En mécanique : $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ donc $T^2 = \frac{4\pi^2}{g}\ell \quad \frac{4\pi^2}{g} = \frac{\Delta(T^2)}{\Delta\ell}$ en s^2/m ou $s^2.m^{-1}$.

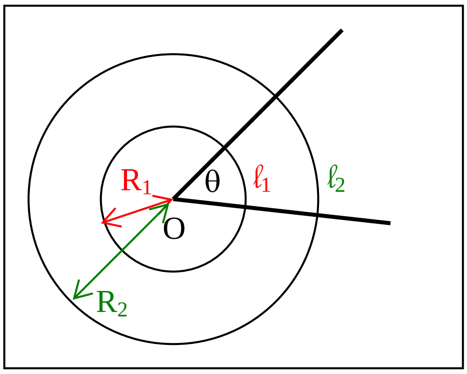
En optique (réfraction) : $\sin i_2 = (n_1/n_2) \sin i_1 \quad (n_1/n_2) = \frac{\Delta(\sin i_2)}{\Delta(\sin i_1)}$ sans dimension et sans unité.

Radian



Soit un cercle de rayon R de centre O.
ℓ_1 : longueur de l'arc AB correspondant à l'angle $\theta_1 = (AOB)$.
ℓ_2 : longueur de l'arc AC correspondant à l'angle $\theta_2 = (AOC)$.

$\theta_2 = 2 \times \theta_1 \Rightarrow \ell_2 = 2 \times \ell_1$



Soient deux cercles concentriques de rayons R_1 et R_2.
Soit un angle θ issu de O.
ℓ_1 : longueur de l'arc du cercle de rayon R_1 correspondant à l'angle θ .
ℓ_2 : longueur de l'arc du cercle de rayon R_2 correspondant à l'angle θ .

$R_2 = 2 \times R_1 \Rightarrow \ell_2 = 2 \times \ell_1$

Conclusion : **ℓ est proportionnel à R et à θ**.

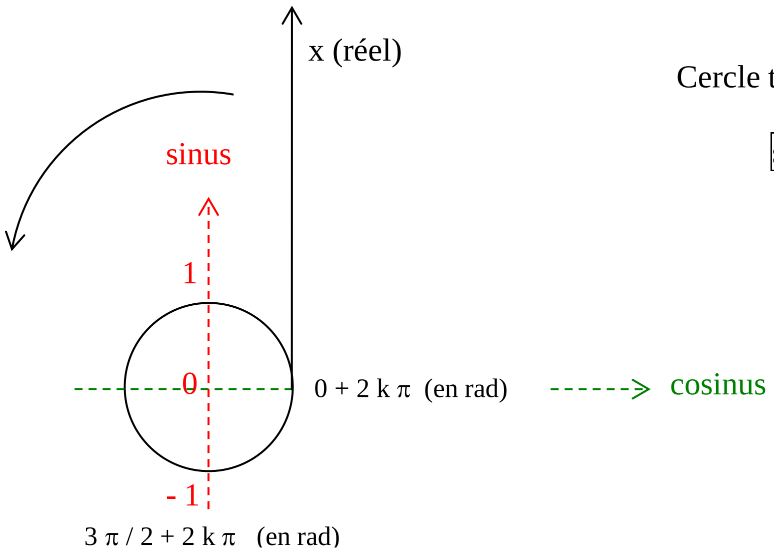
Si on exprime ℓ et R dans la même unité, $\theta = \dfrac{\ell}{R}$ est sans dimension (rapport de deux longueurs), mais s'exprime alors en **radian**.

Remarque : la circonférence d'un cercle de rayon R est $\mathcal{C} = 2\pi R$ donc l'angle correspondant à un tour complet est $\theta = \dfrac{\mathcal{C}}{R} = 2\pi$ rad .

Remarque : on peut graduer un rapporteur en degrés d'angle.

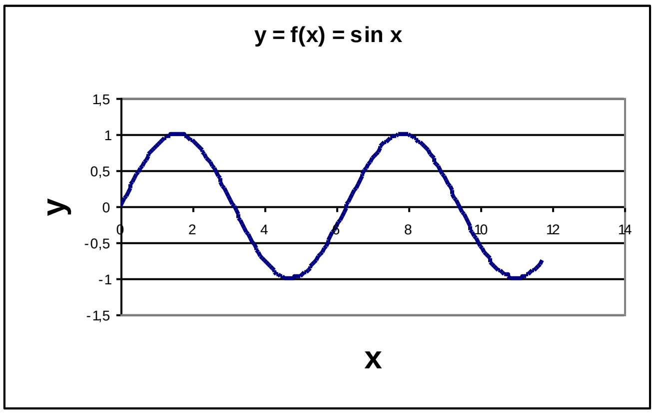
angle θ en rad	angle θ en °
2π	360
π	180
$\pi / 2$	90

Sinusoïdes

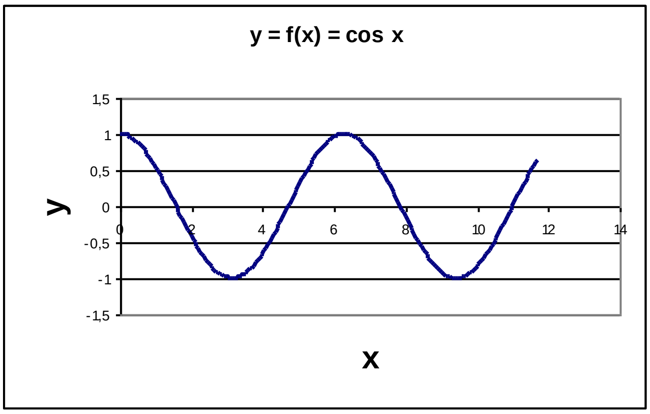


Cercle trigonométrique de rayon 1

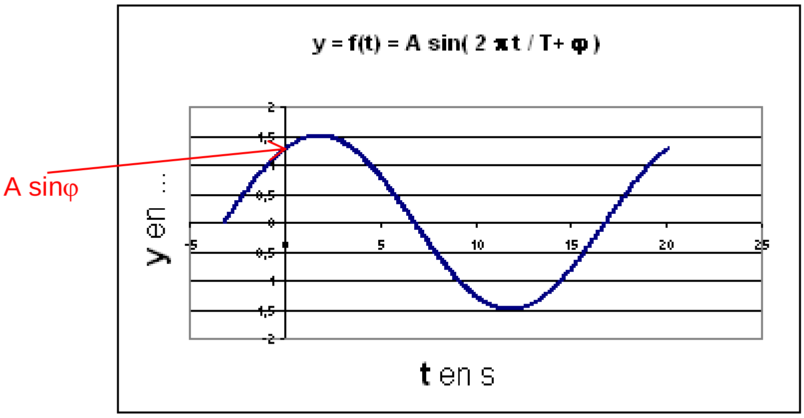
$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$



fonction de]-∞ ; +∞[dans [-1 ; 1]
période $2\pi \approx 6{,}3$



fonction de]-∞ ; +∞[dans [-1 ; 1]
période $2\pi \approx 6{,}3$



amplitude
A = 1,5 ...
période
T = 20 s
phase à l'origine
φ = 1 rad

On note $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$ la pulsation (vitesse angulaire) en $rad.s^{-1}$.

Notations des fonctions dérivées

Soit u une fonction et t la variable : u’(t) se note $\frac{du}{dt}(t)$ ou même $\frac{du}{dt}$ (fonction dérivée de u par rapport au temps) ; u’’(t) se note $\frac{d^2u}{dt^2}(t)$ ou même $\frac{d^2u}{dt^2}$ (fonction dérivée seconde de u par rapport au temps).

Forme des solutions des équations différentielles

Soit u une fonction du temps t ; l’équation différentielle $\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau} u = K$ a une solution de la forme $u = A\,e^{-t/\tau} + B$ avec $B = K\tau$

A est à déterminer à partir des conditions initiales (en t = 0, u = … ou $\frac{du}{dt} = \ldots$)

Remarque : $\frac{du}{dt} = -\frac{A}{\tau}\,e^{-t/\tau}$

Soit u une fonction du temps t ; l’équation différentielle $\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 u = 0$ a une solution de la forme $u = A\cos(\omega t + \varphi)$

A et φ sont à déterminer à partir des conditions initiales (en t = 0, u = … et $\frac{du}{dt} = \ldots$)

Remarque : $\frac{du}{dt} = -\,\omega\,A\sin(\omega t + \varphi)$ et $\frac{d^2u}{dt^2} = -\,\omega^2\,A\cos(\omega t + \varphi)$

Fonctions exponentielle et logarithme népérien

La fonction logarithme décimal $x \mapsto \log x$, définie sur]0 ;+∞[, est la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto 10^x$, définie sur]- ∞ ; + ∞ [: $\log(10^x) = x$ et $10^{\log x} = x$

Remarques : *en chimie on note pK pour (- log K) ou pH pour (- log[H_3O^+])*

en physique et chimie la variable est souvent la date (le temps) notée t et les expressions (t / τ) et (λ t) sont sans dimension.

La fonction logarithme népérien Ln est définie sur]0 ;+∞[; c'est la fonction réciproque de la fonction exponentielle e définie sur]- ∞ ; + ∞ [: $\text{Ln}(e^x) = x$ et $e^{\text{Ln}\,x} = x$

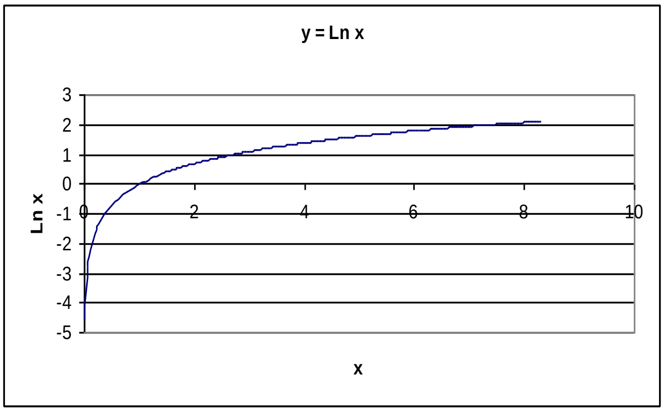
$$\left.\begin{array}{l} \text{Ln } a + \text{Ln } b = \text{Ln } ab \\ \text{Ln } a^2 = 2 \text{ Ln } a \\ \text{Ln } a - \text{Ln } b = \text{Ln } a/b \\ \text{Ln } 1/a = - \text{Ln } a \end{array}\right\} \text{formules du même type avec } \log x$$

$$\left.\begin{array}{l} e^a \times e^b = e^{a+b} \\ (e^a)^b = e^{ab} \\ e^{-a} = \dfrac{1}{e^a} \end{array}\right\} \text{formules du même type avec } 10^x$$

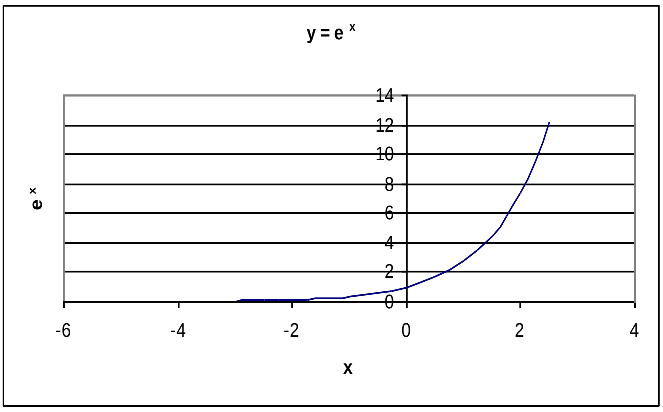
Si $f(x) = e^x$, alors f '(x) , noté $\dfrac{df}{dx}(x)$ en physique, vérifie $f'(x) = f(x) = e^x$

Si $f(x) = e^{\lambda x}$, alors f '(x) , noté $\dfrac{df}{dx}(x)$ en physique, vérifie $f'(x) = \lambda f(x) = \lambda e^{\lambda x}$

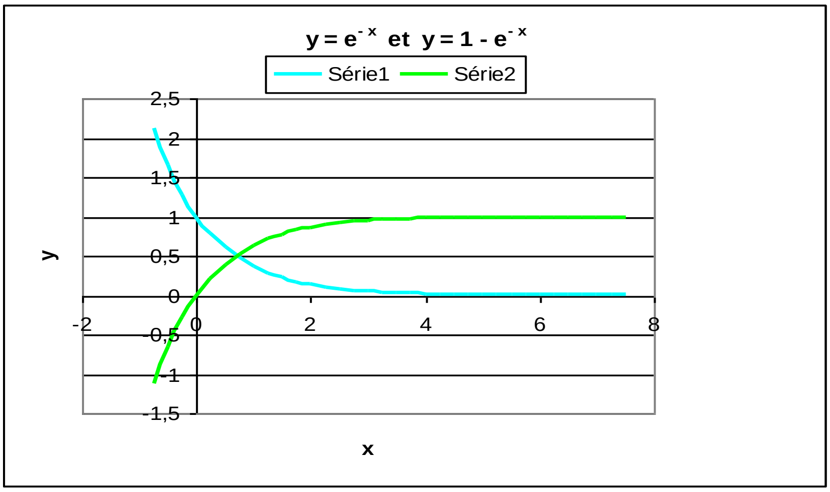
Si $f(x) = e^{-\lambda x}$, alors f '(x) , noté $\dfrac{df}{dx}(x)$ en physique, vérifie $f'(x) = -\lambda f(x) = -\lambda e^{-\lambda x}$



Ln 1 = 0

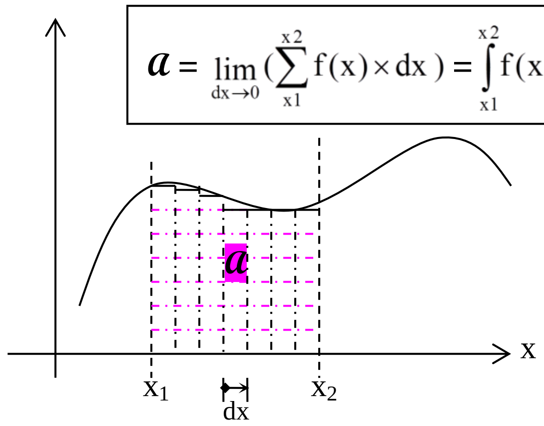


$e^0 = 1$



Aire sous la courbe représentative d'une fonction - Intégration

Soit f une fonction de t ; F est une primitive de f si F' = f (alors (F + constante k) est aussi une primitive de f puisque la dérivée d'une constante est nulle.)



$$a = \lim_{dx \to 0} \left(\sum_{x1}^{x2} f(x) \times dx \right) = \int_{x1}^{x2} f(x)\, dx = F(x_2) - F(x_1)$$

intégrale de la fonction f entre les bornes x_1 et x_2

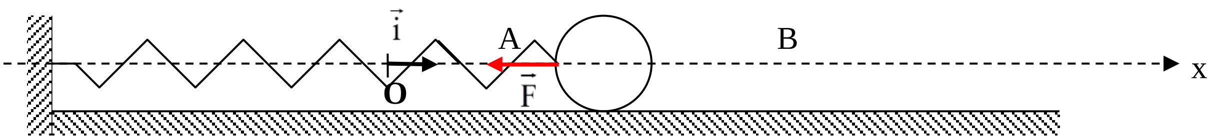
Application au travail d'une force non constante :

Soit $\vec{F} = -k\, x\, \vec{i}$ la force de rappel exercée par un ressort sur une masse à son extrémité (l'autre extrémité du ressort étant fixe). Attention : ce vecteur force n'est pas un vecteur constant.

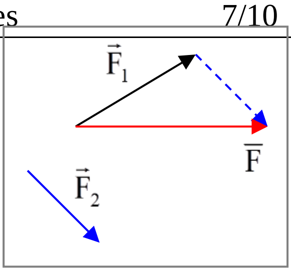
Travail de cette force lors du déplacement de A à B de son extrémité sur l'axe (O ; $\vec{i}$) :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) \approx \sum_{xA}^{xB} \vec{F} \bullet \vec{dx} \quad \text{avec } \vec{dx} = dx\, \vec{i} \qquad W_{A\to B}(\vec{F}) \approx \sum_{xA}^{xB} -k\, x\, dx$$

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_{xA}^{xB} -k\, x\, dx = -k \left[\frac{x_B{}^2}{2} - \frac{x_A{}^2}{2} \right]$$

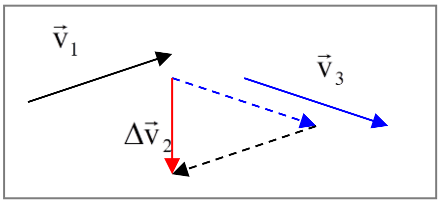


Opération sur les vecteurs



Construction du vecteur somme de deux vecteurs $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

Construction du vecteur différence de deux vecteurs $\Delta\vec{v}_2 = \vec{v}_3 - \vec{v}_1$



Dérivation et vecteur (en mécanique)

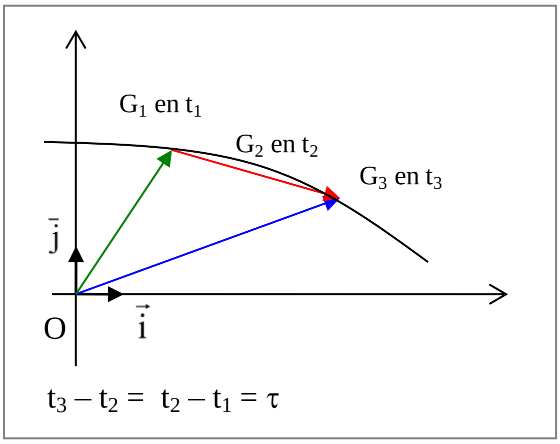
Soit un repère $(O\,;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\,)$ fixe dans le référentiel choisi.

La position du point G est repérée au cours du temps par le vecteur position $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

où x, y et z sont des fonctions du temps t.

Le vecteur vitesse du point G est $\vec{v}_G = \dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\begin{pmatrix} v_x = \dfrac{dx}{dt} \text{ ou } x' \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} \text{ ou } y' \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} \text{ ou } z' \end{pmatrix}$

où v_x, v_y et v_z sont des fonction du temps t.



$$\vec{v}_{G2} = \lim_{\tau\to 0}\frac{\overrightarrow{G_1G_3}}{2\,\tau} = \lim_{\tau\to 0}\frac{\overrightarrow{G_1O}+\overrightarrow{OG_3}}{2\,\tau}$$

$$= \lim_{\tau\to 0}\frac{\overrightarrow{OG_3}-\overrightarrow{OG_1}}{2\,\tau}$$

$$= \lim_{\tau\to 0}\frac{\Delta\overrightarrow{OG}}{2\,\tau} \quad \text{en } G_2$$

$$= \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \quad \text{en } t_2$$

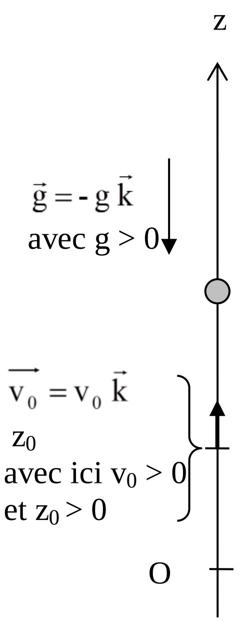
Intégrations et équations horaires en mécanique

<u>Très important</u> : orientation respective des axes du repère d'espace et des différents vecteurs conditions initiales

Dans un référentiel galiléen :

en chute libre : seule force : le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$

$2^{ème}$ loi de Newton : $\vec{P} = m\,\vec{a}$



Accélération $\vec{a} = \vec{g}$

Projection sur Oz : $a_z = -g$

Vitesse (primitive de l'accélération) telle que $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$

Projection sur Oz : $\dfrac{dv_z}{dt} = a_z = -g$

$\Rightarrow v_z = -g\,t + cste$ or en $t = 0$, $v_z = v_0$ donc $v_z = -g\,t + v_0$

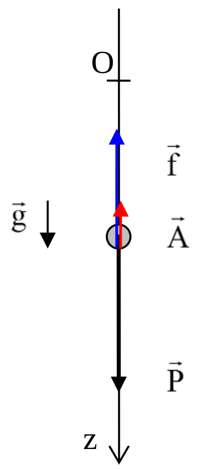
Position (primitive de la vitesse) telle que $\dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = \vec{v}$

Projection sur Oz : $\dfrac{dz}{dt} = v_z = -g\,t + v_0$

$\Rightarrow z = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\,t + cste$

or en $t = 0$, $z = z_0$ donc $z = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\,t + z_0$

Méthode d'Euler

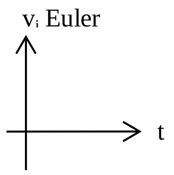


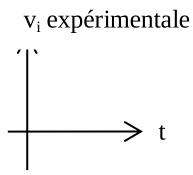
Dans le cas d'une chute verticale avec frottement dans un fluide de la forme $\vec{f} = -k\,\vec{v}$.

$$m\frac{dv}{dt} + k\,v = (m - m_{\text{fluide déplacé}})g$$

$$\Rightarrow \boxed{a + \frac{k}{m}v = \frac{(m - m_{\text{fluide déplacé}})}{m}g} \quad \text{avec} \quad \boxed{a_{(t)} = \frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{(t+\Delta t)} - v_{(t)}}{\Delta t}}$$

en $t_0 = 0$	$v_0 = 0$		$a_0 = \dfrac{m - m_{\text{fluide déplacé}}}{m}g = \dfrac{k\,v_{\text{limite}}}{m}$
en $t_1 = t_0 + \Delta t$	$v_1 = v_0 + a_0\,\Delta t$	puis	$a_1 = a_0 - \dfrac{k}{m}v_1$
en $t_2 = t_1 + \Delta t$	$v_2 = v_1 + a_1\,\Delta t$	puis	$a_2 = a_0 - \dfrac{k}{m}v_2$
en $t_3 = t_2 + \Delta t$	$v_3 = v_2 + a_2\,\Delta t$	puis	$a_3 = a_0 - \dfrac{k}{m}v_3$
en $t_4 = t_3 + \Delta t$	$v_4 = v_3 + a_3\,\Delta t$	etc ….	



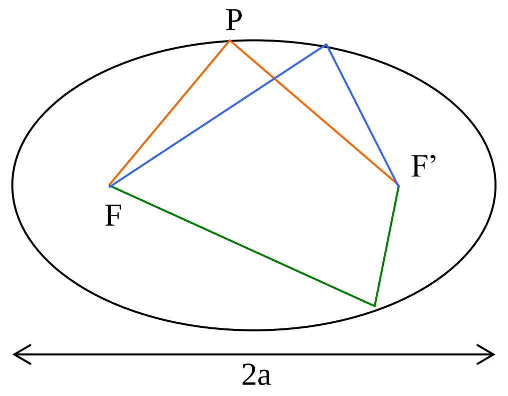


Si les points v_i (vitesse instantanée expérimentale déduite par exemple d'un pointage) aux instants t_i se superposent bien à la courbe obtenue à partir des v_i (vitesse instantanée calculée par la méthode d'Euler) aux instants t_i alors la modélisation des frottements fluides en $\vec{f} = -k\,\vec{v}$ est correcte.

Attention :

- il faut bien choisir le pas Δt de l'algorithme de calcul ;
- la méthode d'Euler nécessite d'ajuster les paramètres a_0 et v_{limite} $\left(\dfrac{k}{m} = \dfrac{a_0}{v_{\text{limite}}}\right)$.

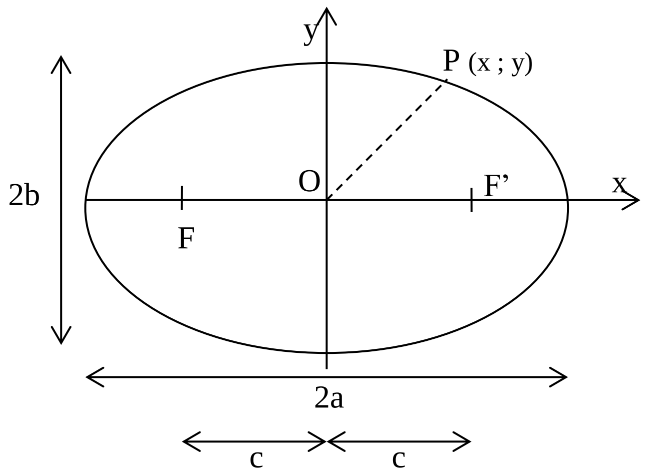
Le cercle : cas particulier de l'ellipse



F et F' : foyer de l'ellipse

ellipse : ensemble des points P tels que FP + PF' = cste

soit 2a cette constante, a est appelé demi grand axe de l'ellipse



excentricité de l'ellipse :

$$0 \leq \varepsilon = \frac{c}{a} < 1$$

lorsque F et F' sont confondus en O, alors a = b et ε = 0 : l'ellipse est un cercle

Equation de l'ellipse : $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$

Equation du cercle (a = b = r) : $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$ soit $x^2 + y^2 = r^2$

Voir par exemple http://www.mathcurve.com/courbes2d/ellipse/ellipse.shtml
si l'ellipse vous intéresse